УДК 539.3

Нестационарное деформирование балок и пластин при наличии дополнительных опор и ребер жесткости

А. В. Воропай, П. А. Егоров, Е. С. Малахов
Национальный технический университет "ХПИ", Украина
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Украина

Non-stationary vibrations of complex mechanical systems that can be considered in the form of beams and plates with various mechanical features are investigated. Modeling of features (concentrated masses, additional supports and stiffeners) is made by replacing their influence with non-stationary concentrated forces (reactions), which are determined from the solution of Volterra integral equations using Tikhonov's regularizing algorithm.

Key words: *Nonstationary deforming, plate, beam, stiffener, additional support, concentrated mass, Volterra integral equation.*

1. Введение

Реальные механические объекты являются, как правило, достаточно сложными. В некоторых случаях их нестационарное деформирование может быть исследовано на основе известных моделей балок или пластин с учётом влияния различных особенностей, а именно: дополнительных опор (упругих или вязкоупругих); рёбер жесткости; малых тел (имеющими некоторую массу при малых геометрических размерах). В современной практике при построении математических моделей объектов и систем иногда рассматривают основной механический объект (балка или пластина), а остальными при этом пренебрегают. Следует отметить, что при нестационарных колебаниях в динамических системах значительное влияние могут оказывать жесткости и демпфирующие свойства дополнительных опор и рёбер, а также силы инерции, вызванные малыми телами, у которых могут быть относительно высокие ускорения.

В настоящей работе излагается подход, позволяющий учитывать влияние рёбер и точечных особенностей на нестационарное деформирование элементов конструкции их путем введения в исходные модели деформирования балок (пластин) дополнительных нестационарных сил (реакций). Эти неизвестные нестационарные нагрузки могут быть определены из соответствующих интегральных соотношений, путем сведения их к интегральным уравнениям Вольтерра или их системам.

При таком подходе в ряде случаев подкрепляющее ребро жесткости на пластине можно рассматривать как присоединённый объект в виде балки и исследовать связанные колебания системы балка-пластина. Дальнейший анализ нестационарного деформирования механической системы балка-пластина может быть произведен с допущением, о том, что балка с пластиной контактируют не по всей поверхности, а в некоторых конкретных точках, то есть, по сути, ребро жесткости заменяется системой из нескольких дополнительных нагрузок. Естественно, что при выполнении конкретных расчетов необходимо искать компромисс между количеством неизвестных сил (точностью модели) и временем, затрачиваемым на расчёты.

2. Постановка задачи и математическая модель

Нестационарное деформирование балок или пластин описывается системами дифференциальных уравнений в частных производных. Опыт показывает, что для указанных объектов хорошие результаты дают модели на базе гипотез С. П. Тимошенко, учитывающие инерцию вращения и сдвиг [1, 2]. Такие системы уравнений могут быть решены при помощи разложения искомых функций (перемещений и углов поворота) в соответствующие ряды (Фурье, Бесселя и т.п.). Тогда для коэффициентов разложения, как функций времени, можно записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть решены с использованием интегрального преобразования Лапласа [3]. В этом случае, при выполнении обратных преобразований, решения могут быть представлены в виде интегралов типа свёртки, что позволяет выделить аналитические выражения для ядер интегральных уравнений.

Таким образом, для искомых функций перемещений и углов поворота нормали могут быть получены выражения вида:

$$w_j(t) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t K_{ij}(t-\tau) \cdot P_i(\tau) d\tau , \qquad (1)$$

где $w_j(t)$ – изменение во времени компоненты перемещения некоторой точки (например, прогиба пластины), $P_i(t)$ – i-я нагрузка ($P_{0i}(t)$ – внешняя сила или $R_i(t)$ реакция на моделируемую особенность, например дополнительную опору), $K_{ij}(t)$ – ядро соответствующего свёрточного интеграла для i-ой нагрузки в j-й точке.

При нестационарном деформировании балок или пластин с особенностями для каждой моделируемой особенности – объекта, контактирующего с балкой или пластиной можно записать выражение вида (1). То есть для N-объектов можно записать систему из N интегральных уравнений, которая будет иметь $2 \cdot N$ неизвестных (неизвестны как функции перемещения $w_j(t)$ так и $R_i(t)$ – реакции). Для решения такой системы интегральных уравнений необходимо записать дополнительные (замыкающие) соотношения для каждой из точек, а именно:

а) для учета сосредоточенной массы выражение вида

$$R_i(t) = m_i \frac{d^2 w_i(t)}{dt^2} \Rightarrow w_i(t) = \frac{1}{m_i} \int_0^t R_i(\tau)(t-\tau) d\tau , \qquad (2)$$

где m_i – сосредоточенная масса в i -й точке;

б) для учета дополнительной упругой опоры

$$R_i(t) = c_i w_i(t) , \qquad (3)$$

где c_i – коэффициент жёсткости дополнительной опоры в i -й точке;

в) для учета демпфирования в некоторой точке

$$R_i(t) = \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt} , \qquad (4)$$

где κ_i – коэффициент демпфирования в i -й точке;

г) большинство реальных опор на самом деле вязко-упругие, т.е. обладают как вязкими, так и упругими характеристиками, и корректнее использовать выражения вида

$$R_i(t) = c_i w_i(t) + \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt}. \qquad (5)$$

Также можно представить моделируемый объект в виде комбинации массы, жесткости и демпфирующих свойств.

д) для учета влияния ребра жесткости в N точках согласно условиям совместности перемещений необходимо записать две системы из N интегральных уравнений вида (1) для соответствующих точек балки и пластины.

3. Решение задачи

Система интегральных соотношений вида (1), дополненная выражениями вида (2)-(5), решается согласно следующему алгоритму:

1) Выражения вида (2)-(5) преобразуются к виду

$$w_i(t) = f\left[R_i(t)\right]. \qquad (6)$$

Например, для случая г) выражение (5) будет преобразовано к

$$w_i(t) = \int_0^t K_e(t-\tau) R_i(\tau) d\tau, \qquad (7)$$

где $K_e(t) = \frac{1}{\kappa} \cdot e^{-\frac{c}{\kappa} \cdot t}$.

2) Выполняется исключение неизвестных функций перемещений $w_i(t)$, путем приравнивания соответствующих выражений вида (1) и (6), например, для одной вязко-упругой опоры (1) и (7), а именно:

$$\int_0^t K_P^W(t-\tau) P_0(\tau) d\tau - \int_0^t K_R^W(t-\tau) R(\tau) d\tau = \int_0^t K_e(t-\tau) R(\tau) d\tau. \qquad (8)$$

Выражение (8) после переноса известных слагаемых в правую часть уравнения, а неизвестных в левую примет вид

$$\int_0^t \left[K_R^W(t-\tau) + K_e(t-\tau)\right] R(\tau) d\tau = \int_0^t K_P^W(t-\tau) P_0(\tau) d\tau. \qquad (9)$$

В итоге исходная система, состоящая из $2 \cdot N$ интегро-дифференциальных соотношений, сводится к системе N интегральных уравнений Вольтерра относительно неизвестных реакций $R_i(t)$.

3) Выполняется дискретизация системы интегральных уравнений (СИУ). После дискретизации каждое интегральное уравнение заменяется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В результате чего, например, для трёх неизвестных реакций приходим к блочной СЛАУ вида:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{P1} \\ \mathbf{w}_{P2} \\ \mathbf{w}_{P3} \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

где матрицы $\mathbf{A}_{ij}$ соответствуют дискретизированным ядрам интегральных уравнений $K_{ij}(t)$ в i-й точке для j-й нагрузки, векторы $\mathbf{r}_j$ – изменению функции j-й нагрузки во времени $R_j(t)$, $\mathbf{w}_{Pi}$ – функции изменения перемещения во времени в i-й точке, вызванные только внешней силой $P_0(t)$, определяемые как $w_{Pi} = \int_0^t K_{Pi}(t-\tau)P_0(\tau)d\tau$. Укажем, что в интегральных уравнениях присутствуют только конечно-разностные ядра Коши, поэтому все матрицы $\mathbf{A}_{ij}$ будут являться перестановочными и квазидиагональными.

4) Блочная СЛАУ вида (10) решается при помощи обобщенного алгоритма Крамера или Гаусса [4] с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [5].

В результате решения блочной СЛАУ определяются неизвестные зависимости во времени реакций $R_j(t)$, каждая из которых описывает влияние присоединённого в соответствующей точке объекта на нестационарные колебания (деформирование) рассматриваемой балки или пластины. Зная внешнее нагружение и зависимости $R_j(t)$, можно определить все компоненты перемещения в любой требуемой точке исследуемого объекта на базе зависимостей вида (1).

5. Заключение

В работе описан подход, позволяющий исследовать нестационарное деформирование балок и пластин при наличии сосредоточенных масс, дополнительных опор и рёбер жесткости. Влияние которых заменяется неизвестными силами (реакциями). Идентификации неизвестных реакций производится на основе решения интегральных уравнений Вольтерра или их систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
2. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – 576 с.
5. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука. // Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 200 с.

Надійшла 03.6.2017.